Universidade de Brasília
Departamento de Filosofia

Gustavo Schmidt Joau e Silva

Abordagens da construtividade matemática

Brasília

2022

Gustavo Schmidt Joau e Silva

Abordagens da construtividade matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Universidade de Brasília como requisito para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Orientador: Professor Doutor Rodrigo de Alvarenga Freire

Brasília

2022

Ficha catalográfica elaborada automaticamente,
com os dados fornecidos pelo(a) autor(a)

Sa Schmidt Joau e Silva, Gustavo
Abordagens da construtividade matemática / Gustavo Schmidt Joau e Silva; orientador Rodrigo de Alvarenga Freire. -- Brasília, 2022.
50 p.

Dissertação(Mestrado em Filosofia) -- Universidade de Brasília, 2022.

1. Teoria dos conjuntos. 2. Construtividade. 3. Intuicionismo. I. de Alvarenga Freire, Rodrigo, orient. II. Título.

Gustavo Schmidt Joau e Silva

Abordagens da construtividade matemática

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Filosofia do Departamento de Filosofia da Universidade de Brasília como requisito para a obtenção do título de Mestre em Filosofia.

Professor Doutor Rodrigo de Alvarenga Freire
Orientador
Universidade de Brasília

Professor Doutor Edgar Luis Bezerra de Almeida
Instituto Federal de Brasília

Professor Doutor Alfredo Roque de Oliveira Freire Filho
Universidade de Aveiro

Brasília, 14 de outubro de 2022

Resumo

O conceito de construtividade é muito discutido no campo da fundamentação e da filosofia da matemática. Entretanto, não há consenso sobre sua definição. Este trabalho se propõe a definir e analisar abordagens desse conceito no contexto da matemática clássica e intuicionista. Para tanto, apresentamos duas abordagens, a tradicional e a de produção relativa de conjuntos, e as analisamos nos contextos da teoria de conjuntos clássica ZFC e das teorias de conjuntos intuicionistas IZF e CZF.

Argumentamos que a abordagem tradicional, definida com base no uso comum do termo construtividade no contexto da prática matemática, não é adequada para teorias de conjuntos clássicas devido a sua instabilidade por equivalência lógica. Dito de outra forma, sentenças construtivas seriam equivalentes a sentenças não construtivas. Já para teorias de conjuntos intuicionistas, que se propõem a ser construtivas, argumentamos que a abordagem também não é adequada devido ao fato de conterem teoremas não construtivos segundo essa abordagem.

Já a abordagem de produção relativa de conjuntos possui estabilidade por equivalência lógica e se mostra adequada para discutir a construtividade de sentenças. Entretanto, sua definição somente se aplica à teoria de conjuntos clássica ZFC. Finalizamos o trabalho com a proposta de uma adaptação da abordagem de produção relativa de conjuntos que possa ser aplicada a teorias não clássicas, chamada de abordagem de modelos minimais.

Palavras-chaves: Teoria dos conjuntos; Construtividade; Intuicionismo.

Abstract

The concept of constructiveness is often debated in the fields of foundations and philosophy of Mathematics. This work is an attempt to define and analyze different approaches to this concept in the context of classical and intuitionistic Mathematics. To do so, we present two approaches, the traditional and the relative production of sets, and we analyze them in the context of the classical set theory ZFC and the intuitionistic set theories IZF and CZF.

We argue that the traditional approach, defined based on the common use of the term constructiveness in the context of mathematical practice, is not appropriate to classical theories due to its instability by logical equivalence. In other words, constructive sentences are equivalent to non-constructive ones. For intuitionistic theories, which aim to be constructive, we argue that the approach is also not appropriate due to the fact that these theories contain non-constructive sentences according to this approach.

The relative production of sets approach does have stability by logical equivalence and it is adequate to discuss the constructiveness of sentences. However, its definition is only applicable to the classical set theory ZFC. We finalize this work with a proposal of an adaptation to the relative production of sets approach that makes it applicable to intuitionistic set theories, namely the minimal models approach.

Keywords: Set theory; Constructiveness; Intuitionism.

Sumário

1 Introdução

O conceito de construtividade tem um importante papel na história da filosofia da matemática. Apesar de a matemática contemporânea fazer extensivo uso de raciocínios ditos 'não construtivos', uma permanente preocupação com quais hipóteses em provas matemáticas são ou não 'construtivas' é ainda muito presente. E essa não é uma preocupação nova. A construção explícita dos objetos matemáticos foi uma preocupação recorrente no desenvolvimento da matemática, seja em relação aos números imaginários ou provas que dependiam do infinito atual, (SILVA, 2007, p. 143).

Na segunda metade do século XIX, David Hilbert usou um raciocínio não construtivo para resolver o problema de Gordan [1]. Esse é um dos primeiros exemplos em que esse tipo de raciocínio foi conscientemente usado para resolver um importante problema em aberto. Em resposta a Hilbert, porém, Gordan teria respondido *"Das ist nicht Mathematik. Das ist Theologie."* (Isso não é matemática. Isso é teologia.), (PERDRY, 2004). É notável que a rejeição de provas não construtivas não sobreviveu por muito tempo – afinal, um importante poder expressivo para as teorias matemáticas resulta da inclusão desse tipo de demonstração. Mesmo assim, a construtividade não perdeu importância. A inclusão ou não de axiomas na teoria de conjuntos ainda hoje é discutida em termos de construtividade; podemos dizer, para esse efeito, que parte significativa das motivações para se rejeitar o axioma da escolha ainda seja a percepção de que este seria não construtivo.

Em outra direção, a rejeição dos raciocínios não construtivos se institucionalizou em uma corrente matemático-filosófica alternativa. Apesar de tradicionalmente haver uma rejeição a raciocínios não construtivos, muito da própria matemática praticada no século XIX já poderia ser considerada não construtiva. É nessa direção que Brouwer, (BROUWER, 1999), propõe reconstruir a matemática a partir de bases puramente construtivas, a matemática intuicionista. Entretanto, se pretendemos avaliar a construtividade em sentenças (como o axioma da escolha), ainda que não rejeitemos a não construtividade em geral, precisamos de um critério robusto para o que conta como construtivo em uma teoria que não seja completamente construtiva. É esse tipo de definição que pretendemos avaliar nessa dissertação.

Analisaremos, portanto, algumas abordagens para a construtividade em teorias mate-

[1] O problema de Gordan lida com as soluções para invariantes de sistemas de formas polinomiais. Gordan demonstrou de modo construtivo que sistemas de formas com duas variáveis possuem base finita que gera todos os seus invariantes comuns. Hilbert generaliza o resultado mostrando que sistemas de formas de grau maior também possuem soluções de base finita. Porém, o método que ele usou é não construtivo e prova a existência das bases finitas sem exibir quais são essas bases. (LEWIS, 1994, p. 43-54)

máticas. Discutiremos a abordagem 'tradicional' (CT), tomando como bases a lógica clássica, como definido em (FREIRE, 2019, p. 16), e a lógica intuicionista, como definido em (PRIEST, 2008) nos capítulos 6 e 20. A abordagem tradicional não possui uma fonte padrão. Isto é, não conhecemos um artigo ou livro que faça um tratamento sistemático do que se entende por abordagem tradicional para o conceito de construtividade. Apesar disso, tornaremos preciso o que se quer dizer por abordagem tradicional a partir de algumas referências que mencionam o conceito (LEVY, 2002) e a partir de algumas discussões presentes na plataforma Mathoverflow (FREIRE, 2018; HAMKINS, 2013; FREIRE, 2020).

Em seguida, exploraremos a abordagem proposta por Freire em *On Existence in Set Theory* (FREIRE, 2012). Chamaremos a abordagem proposta por Freire de 'produção relativa de conjuntos' (PRC). O nosso objetivo será comparar essas abordagens em detalhes. Apesar de Freire demonstrar alguns problemas na abordagem tradicional para a construtividade, ele não menciona aquilo que obteríamos com a mudança da lógica base para uma intuicionista. Nesse sentido, essa dissertação ampliará a discussão iniciada por Freire, incluindo variações para a base lógica.

Concluiremos a dissertação com uma proposta de expansão da definição PRC para lógicas intuicionistas. Notadamente, espera-se que uma lógica intuicionista não adicione não construtividade a uma teoria. Contudo, ainda pode ser o caso que certos axiomas de uma teoria intuicionista sejam não construtivos, mesmo que eles não tornem a teoria clássica. Por exemplo, pode ser o caso que a teoria de conjuntos construtiva CZF (CROSILLA, 2020) seja construtiva, enquanto a teoria de conjuntos intuicionista IZF (que expande CZF) não o seja. Ainda assim, IZF não é uma teoria clássica, uma vez que o terceiro excluído não pode ser demonstrado a partir de seus axiomas. É em vista desse fenômeno que uma proposta de uma adaptação de PRC pode auxiliar no entendimento da construtividade em teorias de base lógica intuicionista.

Nas próximas seções desta introdução, faremos uma revisão das bases técnicas a serem desenvolvidas nesta dissertação.

1.1 Teoria de conjuntos clássica

Quando falamos de teoria de conjuntos clássica neste trabalho, nos referimos à lógica de primeira ordem e à teoria de conjuntos ZFC. Escolhemos esse sistema por ser o mais usual para a fundamentação da matemática e assumimos que a matemática clássica, que inclui análise, álgebra, geometria e demais áreas, pode ser reduzida à teoria de conjuntos clássica. Usaremos como base as definições usadas em (FREIRE, 2019, p. 16) e (JECH, 2006).

O sistema de lógica de primeira ordem clássica tem os axiomas e regras elencados a seguir:

Definição 1.1 *Axiomas e regras da lógica de primeira ordem (A, B e C fórmulas bem formadas):*

1. $\neg A \vee A$*(axioma do terceiro excluído)*
2. $A \vdash B \vee A$ *(regra da expansão)*
3. $A \vee A \vdash A$ *(regra da contração)*
4. $A \vee (B \vee C) \vdash (A \vee B) \vee C$ *(regra da associatividade)*
5. $A \vee B, \neg A \vee C \vdash B \vee C$ *(regra do corte)*
6. $A_x[t] \to \exists x A$ *(axioma da substituição lógica)*
7. $A \to B \vdash \exists x A \to B$, *$x$ não livre em B (regra da introdução do existencial)*

Definimos também a teoria de conjuntos base no sistema Zermelo-Fraenkel (ZF):

Definição 1.2 *Axiomas de ZF:*

1. $\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y]$ *(extensionalidade)*
2. $\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$ *(par)*
3. $\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w)]$ *(união)*
4. $\exists x [\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \to (y \cup \{y\}) \in x)]$ *(infinito)*
5. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow z \in x \wedge \varphi(z))$ *onde y não é livre em $\varphi(z)$ (separação)*
6. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \to w \in x))$ *(conjunto das partes)*
7. $\forall \bar{u} (\forall x \exists ! y \varphi(x, y, \bar{u}) \to \forall w \exists v \forall r (r \in v \leftrightarrow \exists s (s \in w \wedge \varphi_{x,y,\bar{u}}(s, r, \bar{u}))))$ *(substituição)*
8. $\forall x [x \neq \emptyset \to \exists y \in x (x \cap y = \emptyset)]$ *(fundação)*

Separamos o axioma da escolha da axiomatização base para a teoria de conjuntos.

Definição 1.3 *Axioma da escolha, AC:*

$$\forall x(\emptyset \notin x \to \exists f(f : x \mapsto \bigcup x \wedge \forall w \in x(f(w) \in w)))$$

Definição 1.4 *Os axiomas de ZFC são os axiomas de ZF e AC.*

Não existem classes em ZF, mas elas podem nos ajudar a nos expressar de maneira concisa.

Definição 1.5 *Quando nos referimos a uma classe A no contexto de ZF, queremos dizer que existe uma fórmula φ^A com uma variável livre x tal que $x \in A \Leftrightarrow \varphi^A(x)$.*

Além disso, sejam A e B duas classes. $A = B$ se, e somente se, $\forall x(\varphi^A(x) \leftrightarrow \varphi^B(x))$.

Exemplo 1.6 *Utilizando classes, podemos expressar o axioma da substituição da seguinte forma: se uma classe F é uma função, então para qualquer X existe um conjunto $Y = F(X) = \{F(x) : x \in X\}$.*

1.2 Teoria de conjuntos intuicionista

O intuicionismo, antes de ser uma vertente da lógica, é uma vertente da filosofia da matemática. O seu primeiro expoente, Brouwer, (como também outros intuicionistas) rejeitava a própria ideia de sistemas axiomáticos (POSY, 1974; BERKSON, 1978; BROUWER, 1927). Apesar disso, os sistemas intuicionistas são amplamente discutidos – ainda que alguns de seus autores vejam com suspeita as suas próprias formalizações.

Não existe um consenso para a axiomatização padrão do intuicionismo, isto é, existem diversos sistemas não necessariamente equivalentes que formalizam o intuicionismo. Dentre eles, destacamos os sistemas LJ, H-IQC, H-IQCE e N-IQC. Neste trabalho, escolhemos a formalização para lógica intuicionista H-IQC e a teoria de conjuntos intuicionista IZF por serem as mais próximas da lógica clássica e teoria de conjuntos clássica descritas anteriormente, i.e., dentre as formalizações comumente utilizadas, elas são as mais fortes. Também utilizaremos a teoria de conjuntos construtiva CZF, uma teoria mais fraca que IZF, por ser também bastante estudada. Nesta seção, utilizamos as definições de (TROELSTRA, 1973) e (CROSILLA, 2020).

Definição 1.7 *Axiomas e regras da lógica intuicionista H-IQC (A, B e C fórmulas bem formadas):*

1. *$A, A \to B \vdash B$ (modus ponens)*

2. $C \to A(x) \vdash C \to \forall x A(x)$ *se* x *não ocorre livre em* C *(introdução do* $\forall$*)*
3. $A(x) \to C \vdash \exists x A(x) \to C$ *se* x *não ocorre livre em* C *(introdução do* $\exists$*)*
4. $A \to (B \to A)$
5. $(A \to B) \to ((A \to (B \to C)) \to (A \to C))$
6. $A \to (B \to (A \wedge B))$
7. $(A \wedge B) \to A$
8. $(A \wedge B) \to B$
9. $A \to (A \vee B)$
10. $B \to (B \vee A)$
11. $(A \to C) \to ((B \to C) \to ((A \vee B) \to C))$
12. $(A \to B) \to ((A \to \neg B) \to \neg A)$
13. $\neg A \to (A \to B)$
14. $\forall x A(x) \to A(t)$
15. $A(t) \to \exists x A(x)$

A teoria IZF é uma adaptação de ZF para a lógica intuicionista H-IQC. Ela possui os axiomas de ZF modificados para que o axioma do terceiro excluído não seja teorema.

Definição 1.8 *Axiomas de IZF:*

1. $\forall x \forall y [\forall z (z \in x \leftrightarrow z \in y) \to x = y]$ *(extensionalidade)*
2. $\forall x \forall y \exists z \forall w (w \in z \leftrightarrow w = x \vee w = y)$ *(par)*
3. $\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow \exists w (w \in x \wedge z \in w)]$ *(união)*
4. $\exists x \forall y \neg (y \in x)$ *(conjunto vazio)*
5. $\exists x [\emptyset \in x \wedge \forall y (y \in x \to suc(y) \in x)]$ *(infinito)*
6. $\forall a \exists x \forall y (y \in x \leftrightarrow y \in a \wedge \varphi(y))$ *onde* x *não é livre em* $\varphi(y)$ *(separação)*
7. $\forall x \exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \forall w (w \in z \to w \in x))$ *(conjunto das partes)*

8. $\forall a[\forall x \in a \exists y \varphi(x,y) \to \exists b(\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y)$ *para todas fórmulas* $\varphi(x,y)$ *onde* b *não é livre em* $\varphi(x,y)$ *(coleção)*

9. $\forall a(\forall y \in a \varphi(y) \to \varphi(a)) \to \forall a \varphi(a)$ *para toda fórmula* $\varphi(a)$ *(ϵ-indução)*

A teoria IZF pode ser entendida como um enfraquecimento da teoria ZF, isto é, a coleção de teoremas de ZF contém a coleção de teoremas de IZF. Os axiomas da substituição e fundação são trocados, respectivamente, pelos axiomas da coleção e da ϵ-indução. Além disso, o axioma do vazio é introduzido pela limitação da lógica intuicionista em definir o conjunto vazio utilizando o axioma da separação. Esse último fato mostra que, apesar de muitos axiomas serem formulados com a mesma estrutura sintática, os teoremas derivados são diferentes devido ao contexto lógico que estão inseridos.

Para demonstrar que IZF é um enfraquecimento de ZF, basta demonstrar que os axiomas de IZF que não estão contidos em ZF são teoremas de ZF e que algum teorema de ZF não é teorema de IZF.

Lema 1.9 *O axioma da coleção é teorema de ZF.*

Prova. Uma função f é compatível com $R(A)$ se $Dom(f) \subseteq A$ e $xRf(x)$. Então $B = \bigcup\{f | f \text{ é compatível com } R(A)\}$. Pelos axiomas da separação e conjunto das partes definimos $A^* = \{x \in P(A) | \exists y \forall z (z \in x \to (zRy))\}$. Seja uma função $f : A^* \mapsto V$ tal que $f(x) = \{b \text{ de rank mínimo } | \forall z \in x(zRb)\}$. Essa definição é válida devido ao axioma da fundação (truque de Scott). Pelo axioma da substituição, $f[A^*]$ é conjunto. Seja $B = \bigcup f[A^*]$. □

Lema 1.10 *O axioma da ϵ-indução é teorema de ZF.*

Prova. Sejam a e b conjuntos quaisquer. Utilizando o axioma do conjunto das partes e o axioma da separação, temos $c = \{\{e\} | e \in b\}$. Seja u um conjunto qualquer e φ uma fórmula ternária tal que $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y,u)$. Então temos que $\forall x \in a \exists y \in b \varphi(x,y,u) \wedge \forall y \in b \exists x \in a \varphi(x,y,u)$. □

Uma formulação alternativa da teoria de conjuntos para a lógica intuicionista é a teoria de conjuntos construtiva CZF.

Definição 1.11 *A teoria de conjuntos construtiva CZF é composta pelos mesmos axiomas de IZF, porém, os axiomas da separação, coleção e conjunto das partes são substituídos, respectivamente, por separação restrita, coleção forte e coleção do conjunto das partes.*

Essa teoria está preocupada não somente com o princípio do terceiro excluído, mas também com um outro princípio construtivo, a predicatividade. Sua definição pode ser encontrada em (CROSILLA, 2020).

A semântica escolhida para a lógica intuicionista é a semântica de Kripke. Utilizaremos essa semântica em algumas provas sobre o sistema intuicionista descrito acima. Tomamos a definição de (PRIEST, 2008, p. 422).

Definição 1.12 *A semântica de Kripke para lógicas intuicionistas com quantificadores consiste em uma quádrupla da forma* $\langle D, W, R, v \rangle$*, onde:*

- D *representa o domínio;*
- W *uma classe de mundos, onde cada mundo* w *é um modelo clássico;*
- $R \subseteq W^2$ *uma relação reflexiva e transitiva de mundos;*
- v *uma valoração de cada fórmula fechada da linguagem no conjunto* $\{0, 1\}$.

Para todo mundo w *e* w' *em* W*, se* wRw'*, então:*

- $v_w(P) \subseteq v_{w'}(P)$*, para qualquer predicado* P*;*
- $D_w \subseteq D'_w$*, onde* D_w *é a restrição do domínio* D *para um mundo* w*.*

Para valoração v*, temos:*

- $v_w(Pa_1...a_n) = 1$ *se* $\langle v_w(a_1), ..., v_w(a_n) \rangle \in v_w(P)$*, caso contrário é 0;*
- $v_w(A \wedge B) = 1$ *se* $v_w(A) = 1$ *e* $v_w(B) = 1$*, caso contrário é 0;*
- $v_w(A \vee B) = 1$ *se* $v_w(A) = 1$ *ou* $v_w(B) = 1$*; caso contrário é 0;*
- $v_w(\neg A) = 1$ *se para todo* w' *tal que* wRw'*,* $v'_w(A) = 0$*; caso contrário é 0;*
- $v_w(A \rightarrow B) = 1$ *se para todo* w' *tal que* wRw'*, ou* $v'_w(A) = 0$ *ou* $v'_w(B) = 1$*, caso contrário é 0;*
- $v_w(\exists x A) = 1$ *se, para algum* $d \in D_w$*,* $v_w(A_x(k_d)) = 1$*, caso contrário é 0;*
- $v_w(\forall x A) = 1$ *se, para cada* w' *tal que* wRw' *e para todo* $d \in D'_w$*,* $v_w(A_x(k_d)) = 1$*, caso contrário é 0.*

Nesse caso, temos as seguintes noções de satisfação para um modelo intuicionista $M = \langle D, W, R, v \rangle$:

$$w \vDash_i \varphi(a) \text{ se, e somente se, } v_w(\varphi(a)) = 1 \tag{1.1}$$

$$M \vDash_i \varphi(a) \text{ se, e somente se, para todo } w \in W, w \vDash \varphi(a) \tag{1.2}$$

A seguir, mostraremos alguns resultados conhecidos sobre a semântica de Kripke para lógicas intuicionistas que serão utilizados ao longo deste trabalho.

Lema 1.13 *Se M é um modelo na semântica intuicionista e M possui um único mundo w, então:*

$$M \vDash_i \varphi \textit{ se, e somente se, } w \vDash_i \varphi$$

Prova. M é um modelo de Kripke, então:

$$M \vDash_i \varphi \text{ se, e somente se, para todo } w \in M, w \vDash_i \varphi$$

Como M tem somente um mundo, isso é equivalente a

$$M \vDash_i \varphi \text{ se, e somente se, } w \vDash_i \varphi$$

$\square$

Corolário 1.14 *Existe uma interpretação de ZF com um só mundo que satisfaz IZF.*

Prova. Seja M um modelo de ZF. Como M satisfaz ZF, ele satisfaz todos os axiomas de IZF exceto os axiomas da coleção forte e da ϵ-indução. Esses dois axiomas são válidos em ZF de acordo com os lemas 1.9 e 1.10. Portanto, M é uma interpretação de um mundo só para IZF. $\square$

Lema 1.15 *Se $M \vDash IZF$ então todos os mundos de M contêm $\emptyset$ e ω.*

Prova. Como $M \vDash IZF$ então $M \vDash \exists x \forall y \neg(y \in x)$. Então, para todo $w \in M$, $v_w(\exists x \forall y \neg(y \in x)) = 1$. Portanto, existe $d \in D_w$ tal que $v_w(\exists x \forall y \neg(y \in x)) = 1$. Logo $d = \emptyset$ e $d \in D_w$ para todo ω em M. Prova similar para o axioma do infinito. $\square$

Os principais resultados da teoria de modelos serão utilizados ao longo deste trabalho sem referência. Entretanto, gostaríamos de ressaltar dois teoremas essenciais para o entendimento do capítulo 5: o teorema colapso de Mostowski e o teorema da interpretação. As definições podem ser encontradas em (JECH, 2006, p. 69) e (SHOENFIELD, 1967, p. 62). Uma análise detalhada do conceito de interpretação pode ser encontrada em (FREIRE; FREIRE, 2019; FREIRE, 2019) e uma interpretação modelo-teórica para interpretações é explorada em (FREIRE; HAMKINS, 2020).

Definição 1.16 *Uma relação R é bem fundada em uma classe A se, e somente se, para todo $x \subset A$, existe um $a \in x$ tal que para todo yRa, $y \notin x$. Esse a é chamado de elemento R-minimal.*

Definição 1.17 *Uma relação R é pequena à esquerda em uma classe A se, e somente se, para todo $x \in A$, $\{y|yRx\}$ é um conjunto.*

Teorema 1.18 *Seja R uma relação bem fundada e pequena à esquerda e φ é uma propriedade qualquer. Se;*

1. *todo R-minimal a é tal que $\varphi(a)$ e*
2. *para todo y, se $\forall x\ (xRy \to \varphi(x))$, então $\varphi(y)$,*

então $\forall x \varphi(x)$.

Prova. Suponha $W = \{x|\neg\varphi(x)\}$ não vazio. Como R é bem fundada, existe um a R-minimal em W, i.e., $\neg\varphi(a)$. Suponha um bRa qualquer. Então $b \notin W$ e, portanto, vale $\varphi(b)$. De modo geral, para todo xRa temos $\varphi(x)$. Assim, pela condição 2, $\varphi(a)$. Absurdo. □

Definição 1.19 *Seja R uma relação binária em uma classe A. Para cada $x \in A$, a extensão de x em A é definida como: $ext_A(x) = \{z \in A|z \in x\}$.*

Uma relação bem fundada R é extensional em uma classe A se, e somente se, $ext_A(x) \neq ext_A(y)$ para quaisquer dois elementos distintos x e y de A.

Definição 1.20 *Seja R uma relação bem fundada, pequena à esquerda e extensional em uma classe A. Um colapso é uma função recursiva definida por: $\pi(x) = \{\pi(y)|yRx\}$.*

Teorema 1.21 *(do colapso de Mostowski) Seja R uma relação bem fundada, pequena à esquerda e extensional em uma classe A. Então existe uma classe B tal que $< A, R >\cong< B, \in>$ e esse isomorfismo é único.*

Resumo da Prova. Prova feita definindo o isomorfismo por indução na relação bem fundada R. Detalhes em (JECH, 2006, p. 69). □

Definição 1.22 *Sejam L e L' linguagens de primeira ordem. Uma interpretação I de L em L' consiste de:*

1. *um símbolo de predicado unário U_I de L', chamado de universo de I;*
2. *para cada símbolo de função n-ária f de L, um símbolo de função n-ária f_I de L';*
3. *para cada símbolo de predicado n-ário p de L, um símbolo de predicado n-ário p_I de L'.*

Uma interpretação de L em uma teoria T' é uma interpretação I de L em $L(T')$ tal que:

1. *I preserva a estrutura booleana das fórmulas interpretadas, i.e., a interpretação de uma negação é a negação da interpretação e a interpretação de conjunções é a conjunção de interpretações;*
2. $\vdash_{T'} \exists x U_I x$
3. $\vdash_{T'} U_I x_1 \to ... \to U_I x_n \to U_I f_I x_1 ... x_n$ *para cada f n-ária em L.*

Uma interpretação de uma teoria T em uma teoria T' é uma interpretação I de $L(T)$ em T' tal que $\vdash_{T'} A^I$ para todo axioma não lógico A de T, sendo A^I a interpretação de A em I.

Teorema 1.23 *(da interpretação) Se I é uma interpretação de T em T', então a interpretação dos teoremas de T são teoremas de T'.*

Resumo da Prova. Prova feita por indução na complexidade das fórmulas. Detalhes em (SHOENFIELD, 1967, p. 47). □

A partir das definições elencadas nessa introdução, começamos a análise das abordagens que definem o conceito de construtividade. Dividiremos a análise nas seguintes etapas:

(i) Apresentação das abordagens da construtividade; (ii) Análise das abordagens; (iii) Relações entre as abordagens; (iv) Proposta de uma abordagem de produção relativa de conjuntos para lógica intuicionista.

2 Abordagens da construtividade matemática

Neste capítulo, apresentaremos duas das principais abordagens da construtividade na matemática: a abordagem tradicional (CT) e a abordagem de produção relativa de conjuntos (PRC). A primeira abordagem possui uma definição de construtividade que independe da lógica utilizada, de modo que é possível utilizá-la tanto para a lógica clássica quanto para a lógica intuicionista. Por outro lado, a segunda é específica para ZFC.

2.1 Abordagem tradicional

Um objeto de um modelo é caracterizável unicamente se existe uma propriedade que é satisfeita no modelo somente por esse objeto. Na abordagem tradicional, uma propriedade é dita construtiva não apenas se existe um objeto que possua certas propriedades, mas sim quando é possível caracterizar esse objeto unicamente. Fraenkel, Bar-Hillel e Lévy comentam em seu livro *Foundations of Set Theory* (FRAENKEL YEHOSHUA BAR-HILLEL, 1973, p. 68) que os termos efetividade e definibilidade são bastante utilizados no meio matemático para descrever o mesmo conceito. Segundo os autores:

> *To give proper weight to a definition, no matter whether within mathematics and logic or without, the existence of objects (at least one object) satisfying the definition should be shown. Normally this is done by providing a particular object that satisfies the definition, i.e., by giving an effective example. Not always need the example be given in a constructive way; its formation may make use of a non-predicative procedure or be based upon joining an existential proof which shows that there are objects satisfying the definition, to a demonstration that no more than one such object can exist. One may maintain that also in this way an effective example was given.*

Com base no parágrafo acima, podemos definir a construtividade de sentenças em uma teoria. Observe que os autores chamam de exemplo efetivo uma prova da existência e unicidade de um objeto satisfazendo uma propriedade. Essa propriedade pode ser satisfeita por outros objetos, mas o fato de podermos fixar um único objeto como exemplo garante a construtividade da propriedade.

Definição 2.1 *Seja uma lógica qualquer s, uma teoria T e uma propriedade $P(x)$ com somente uma variável livre x tal que:*

$$T \vdash_s \exists x P(x)$$

A sentença $\exists x P(x)$ é dita não construtiva em T segundo a abordagem tradicional se, e somente se, não existe uma propriedade $Q(x)$ com somente uma variável livre x, tal que:

$$T \vdash_s \exists! x P(x) \wedge Q(x)$$

Um enunciado é construtivo quando não é o caso que é não construtivo.

Dizemos que existe um método de construção para um objeto se ele satisfaz alguma propriedade construtiva. Essa é a contraparte modelo-teórica da definição acima.

Definição 2.2 *Dada uma linguagem L, um modelo M e um objeto $p \in M$, p é construtivo em relação a L e a M se existe uma sentença $\exists x\phi(x)$ construtiva em L tal que p é o único objeto de M que satisfaz ϕ.*

2.1.1 Abordagem tradicional e teoria de conjuntos clássica

Nesta seção, analisaremos a construtividade segundo a abordagem tradicional na teoria de conjuntos clássica. Mais especificamente, verificaremos propriedades desse conceito no âmbito da lógica de primeira ordem e da teoria de conjuntos ZFC.

O axioma da extensionalidade define a igualdade de conjuntos a partir de seus elementos. Portanto, ao falarmos de um único conjunto que satisfaz um enunciado, estamos indiretamente nos referindo a esse axioma, pois precisamos dele para garantir que esse conjunto é único. Os lemas a seguir deixarão mais claros a definição e seu uso.

Lema 2.3 *O axioma do conjunto vazio é construtivo segundo a abordagem tradicional em ZF.*

Prova. O axioma do conjunto vazio é uma sentença existencial $\exists x \forall y \neg(y \in x)$, sendo que P é $\forall y \neg(y \in x)$. Seja Q igual a $\forall y \neg(y \in x)$ e suponha, por absurdo, que não é o caso que $\exists! x P(x) \wedge Q(x)$. Assim, devemos ter mais de um objeto que satisfaz $P(x) \wedge Q(x)$. Chamemos esses objetos de a e b, com $a \neq b$. Pelo axioma da extensionalidade, deve existir um elemento que pertence a a que não pertence a b, ou um elemento que pertence a b e não pertence a a. No primeiro caso temos $\neg P(a)$ e, no segundo, $\neg P(b)$. Absurdo, logo $\exists! x P(x) \wedge Q(x)$. $\square$

O axioma do conjunto vazio define unicamente o objeto "conjunto vazio". Vale notar que não foi necessário referenciar uma propriedade Q adicional, o próprio axioma já caracteriza unicamente o conjunto. Dito de outra forma, a propriedade do axioma já nos dá o exemplo efetivo do objeto que ele afirma existir.

Agora considere a seguinte propriedade: dados dois conjuntos a e b, existe um conjunto que contém todos os elementos de a e todos os elementos de b. Note que existem diversos conjuntos que satisfazem essa propriedade, inclusive podem existir conjuntos para os quais não existem métodos de construção e que, ainda assim, satisfazem essa propriedade. Porém, a abordagem tradicional não julga as propriedades a partir desse critério. Basta que nesse caso seja produzido um elemento para o qual se tenha um método de construção que satisfaça a propriedade. No caso da propriedade proposta, nós sabemos trivialmente que o conjunto $c = a \cup b$ satisfaz a propriedade. Ele não é o único, pois qualquer conjunto que contenha pelo menos os elementos de c satisfaz essa propriedade. Entretanto, ele é um conjunto que satisfaz a caracterização e isso é suficiente para que a propriedade seja construtiva.

O axioma do infinito é outro exemplo de um enunciado construtivo que não define um objeto unicamente. Esse axioma afirma a existência de um conjunto indutivo que contém o conjunto vazio e o fecho transitivo de sucessores. Mas sabemos que ZFC prova a existência de diversos conjuntos indutivos.

Dessa forma, fica evidente que será necessário definir uma propriedade Q para provar a sua construtividade. Precisamos de uma propriedade Q que selecione, dentre todos os objetos infinitos, um objeto específico. Se tomarmos como esse objeto o conjunto ω, podemos utilizar a sua definição: ele é o menor conjunto indutivo.

Lema 2.4 *O axioma do infinito é construtivo segundo a abordagem tradicional em ZF.*

Prova. Seja P a propriedade de ser indutivo:

$$P(w) := (\emptyset \in w \wedge \forall y(y \in w \rightarrow (y \cup \{y\}) \in w)).$$

O axioma do infinito é uma sentença existencial e afirma a existência de conjuntos indutivos: $\exists x P(x)$. Seja Q a propriedade de estar contido em todos os conjuntos indutivos:

$$Q(x) := P(x) \wedge \forall w(P(w) \rightarrow x \subseteq w).$$

Sabemos, pela definição de ω, que $P(\omega) \wedge Q(\omega)$. Seja um outro conjunto a tal que $P(a) \wedge Q(a)$. De $Q(a)$, concluímos que $a \subseteq \omega$. De $Q(\omega)$, concluímos que $\omega \subseteq a$. Logo, $a = \omega$. Portanto, $\exists! x P(x) \wedge Q(x)$. $\square$

A estratégia de se tomar um menor elemento é um padrão importante para obter exemplos efetivos. Na presença do axioma da escolha, ela pode ser utilizada de forma geral. Entretanto, veremos que esse axioma não é construtivo e, portanto, não pode ser utilizado no contexto de análise de construtividade. Em alguns desses casos, podemos substituir o uso desse axioma pelo truque de Scott, que, por sua vez, depende do axioma da fundação.

Ainda sobre a demonstração anterior, vale notar que não é consenso considerar que o axioma do infinito é construtivo. No intuicionismo como vertente filosófica, todo infinito deveria ser tomado como infinito potencial e o infinito atual é tido como não construtivo. Porém, segundo a definição da abordagem tradicional de construtividade em ZFC, ele é construtivo.

Para sentenças em que o existencial depende de um universal, podemos pensar em uma análise de construtividade relativa. Essas são sentenças da forma $\forall x \exists y \varphi$. Fixando o universal x, podemos analisar a construtividade de y em relação a esse x, em outras palavras, se para cada x existe um único y.

Lema 2.5 *O axioma da união é construtivo segundo a abordagem tradicional em ZF.*

Prova. O axioma da união é da seguinte forma:

$$\forall x \exists y \forall z [z \in y \leftrightarrow \exists w (z \in w \land w \in x)].$$

Tomando um conjunto x qualquer e definindo $\varphi(z)$ como $\exists w(z \in w \land w \in x)$, temos:

$$\exists y \forall z (z \in y \leftrightarrow \varphi(z))$$

Digamos que a é tal que $\forall z(z \in a \leftrightarrow \varphi(z))$. Suponha que b satisfaça a mesma fórmula. Então, se $c \in a$, então vale $\varphi(c)$. Logo, $c \in b$. Analogamente, $c \in b$, concluímos que $c \in a$. Portanto, $a = b$, pelo axioma da extensionalidade. $\square$

Por fim, vamos falar do axioma da escolha. Pode-se dizer que para conjuntos não triviais existe uma gama de conjuntos escolha. Ou, pensando de um outro modo, um conjunto que possua uma boa ordem possui uma variedade de boas ordens que são simples permutações de uma ordem já dada. Isso quer dizer que axiomas como a boa ordem ou a escolha não determinam unicamente os conjuntos que são satisfeitos unicamente.

Isso, porém, não é o que há de mais grave. Ainda que se admita que exista um conjunto escolha e uma boa ordem, pode não ser possível encontrar uma propriedade que determine unicamente algum conjunto que satisfaça essa propriedade, i.e., pode não existir uma propriedade Q tal que a teoria prova $\exists! x(AC) \wedge Q(x)$. Demonstrações negativas como essa, em geral, são mais complexas. No capítulo 3, demonstraremos que o axioma da escolha não tem essa propriedade e, além disso, mostraremos que o axioma da fundação também não tem.

Apesar da naturalidade da definição de construtividade da abordagem tradicional, veremos no capítulo 3 que ela apresenta problemas tanto na teoria de conjuntos clássica quanto na lógica clássica. Demonstraremos que sentenças não construtivas podem ser derivadas de sentenças construtivas e que sentenças equivalentes na teoria podem ter valor de construtividade distintas. Chamaremos essas características de, respectivamente, instabilidade por dedução e instabilidade por equivalência lógica.

2.1.2 Abordagem tradicional e teoria de conjuntos intuicionista

A definição de construtividade tradicional possui consequências interessantes no contexto da matemática e lógica intuicionistas. A lógica intuicionista rejeita o princípio do terceiro excluído e, como vimos na introdução, o sistema que utilizaremos neste trabalho é o H-IQC. Ele é um enfraquecimento da lógica de primeira ordem clássica de forma que o axioma do terceiro excluído não é teorema.

Definição 2.6 *Axioma do terceiro excluído: $\varphi \vee \neg\varphi$ para qualquer fórmula bem formada φ.*

A remoção desse axioma garante a esse sistema duas propriedades bastante estudadas nesse tipo de lógica: a propriedade da disjunção e a propriedade da existência.

Definição 2.7 *Dizemos que um sistema T possui a propriedade da disjunção se para qualquer teorema da forma $\varphi \vee \psi$ então ou φ é teorema ou ψ é teorema.*

Definição 2.8 *Dizemos que um sistema T possui a propriedade da existência se para qualquer teorema da forma $\exists x\varphi(x)$ então podemos demonstrar que $\varphi(t)$ para algum termo t.*

Repare que a segunda propriedade se aproxima bastante da definição de construtividade tradicional: se um sistema possui a propriedade da existência então a fórmula Q sempre existe: $x = t$. Além disso, se uma teoria é construtiva segundo a abordagem tradicional, podemos estendê-la com constantes de forma que ela tenha propriedade da existência.

Concluímos que todos os teoremas de um sistema que possua a propriedade da existência são construtivos. Esse é o caso para H-IQC, o que será demonstrado no capítulo 3.

Uma das ideias do intuicionismo é aproximar uma sentença existencial à produção de um termo. Isso significa que o intuicionista assume dentro da própria lógica um aspecto fundamental da noção tradicional de construtividade. Isso é natural. A crítica intuicionista da lógica clássica diz respeito à negação de objetos não construtivos. Ou, com outras palavras, que existência é dada pela capacidade de construção.

As propriedades citadas são válidas irrestritamente para teorias intuicionistas sem axiomas não lógicos. Isso, porém, não é válido, como veremos no capitulo 3, para teorias intuicionistas em geral. Esse fato pode ser compreendido através da ideia de que alguns axiomas podem carregar não construtividade.

Teorias baseadas na lógica intuicionista são adaptadas para que o terceiro excluído não seja um teorema. Como vimos na introdução, tanto CZF quanto IZF são adaptações de ZF para a lógica intuicionista. Entretanto, veremos que ambas teorias não possuem a propriedade da disjunção nem a propriedade da existência.

Para o intuicionista, portanto, é mais natural dizer que, se alguma propriedade é não construtiva em uma teoria, então a teoria possui axiomas não construtivos. Dizemos que um sistema com essa caraterística possui estabilidade por dedução. É evidente que se um sistema possui estabilidade por dedução, também possui estabilidade por equivalência lógica. Dessa forma, o intuicionismo resolve, pelo menos parcialmente, como veremos nos capítulos a seguir, os problemas da construtividade na teoria de conjuntos clássica apontados anteriormente.

Por fim, essa solução pode ser vista como radical pois a modificação da lógica tem consequência em todas as teorias matemáticas fundadas nela. Veremos a seguir que uma outra abordagem pode ser tomada: no lugar de modificar a lógica, podemos modificar a definição de construtividade.

2.2 Abordagem de produção relativa de conjuntos (PRC)

Chamaremos de abordagem de produção relativa de conjuntos (PRC) a abordagem descrita por Rodrigo Freire no seu trabalho *On Existence in Set Theory*, (FREIRE, 2012). Freire desenvolveu essa abordagem com o intuito de corrigir problemas da abordagem tradicional sem modificar a lógica e teoria de conjuntos clássicas. Para tanto, ele modifica a definição de construtividade da seguinte maneira:

Definição 2.9 *Seja A um enunciado na linguagem de ZFC. Seja $L(x)$ o universo dos construtivos criado a partir de um conjunto x e seu fecho transitivo. O enunciado A é dito construtivo, segundo a abordagem PRC, se, e somente se, $ZFC \vdash \forall x A^{L(x)}$.*

À primeira vista, a definição pode parecer pouco genérica, pois define a construtividade em ZFC a partir de uma pluralidade de universos. Entretanto, ela faz exatamente o que se propõe: cria um critério estável de construtividade para a teoria de conjuntos clássica.

A seguir, vamos analisar a relação dessa definição com a hierarquia de fórmulas, também chamada de hierarquia de Lévy, em referência ao seu criador Azriel Lévy.

Definição 2.10 *Segundo a hierarquia de Lévy, uma fórmula é Σ_0, Π_0 e Δ_0 se possui somente quantificadores limitados. De modo indutivo, uma fórmula é Σ_{n+1} se é da forma $\exists x\varphi$ e φ é Π_n. Do mesmo modo, uma fórmula é Π_{n+1} se é da forma $\forall x\varphi$ e φ é Σ_n. Dizemos que uma propriedade é Σ_n se ela pode ser expressa por uma fórmula Σ_n e, analogamente, uma propriedade é Π_n se ela pode ser expressa por uma fórmula Π_n.*

Definição 2.11 *Uma fórmula φ é absoluta se, e somente se, para todo modelo transitivo M e uma sequência de variáveis $a_1 ... a_n$, então $V \vDash \varphi(a_1 ... a_n) \Leftrightarrow M \vDash \varphi(a_1 ... a_n)$.*

Lema 2.12 *As fórmulas Δ_0 são absolutas.*

Resumo da Prova. Por indução na complexidade de fórmulas. Detalhes em (JECH, 2006, p. 163). □

Lema 2.13 *Qualquer enunciado Δ_0 válido em ZF é construtivo segundo PRC.*

Prova. Seja A um enunciado Δ_0 tal que $ZF \vdash A$.

$ZFC \vdash \forall z A^{L(z)}$

$ZFC \vdash A^{L(z)}$

Como A é absoluta:

$ZFC \vdash A$ □

Lema 2.14 *Qualquer enunciado Π_1 válido em ZF é construtivo segundo PRC.*

Prova. Seja A um enunciado da forma $\forall x\varphi(x)$ tal que $ZF \vdash A$.

$ZFC \vdash \forall z A^{L(z)}$

$ZFC \vdash \forall z(\forall x\varphi(x))^{L(z)}$

$ZFC \vdash (\forall x\varphi(x))^{L(z)}$

$ZFC \vdash \forall x \in L(z)\varphi^{L(z)}(x)$

Como A é Π_1, φ é Δ_0 e, portanto, absoluta:

$ZFC \vdash \forall x \in L(x)\varphi(x)$

$ZFC \vdash \forall x\varphi(x)$

$ZFC \vdash A$ □

Lema 2.15 *Seja A um enunciado Σ_1, da forma $\exists x\varphi(x)$, válido em ZF. Se A é construtivo segundo PRC, então ZFC prova que para qualquer z existe um x em $L(z)$ tal que $\varphi(x)$ é válido.*

Prova. $ZFC \vdash \forall z A^{L(z)}$

$ZFC \vdash \forall z(\exists x\varphi(x))^{L(z)}$

$ZFC \vdash (\exists x\varphi(x))^{L(z)}$

$ZFC \vdash \exists x \in L(z)\varphi^{L(z)}(x)$

Como A é Σ_1, φ é Δ_0 e, portanto, absoluta:

$ZFC \vdash \exists x \in L(z)\varphi(x)$ □

Lema 2.16 *Seja A um enunciado Π_2, da forma $\forall x\exists y\varphi(x, y)$ válido em ZF. Se A é construtivo segundo PRC, então ZFC prova que para qualquer z existe um x em $L(z)$ tal que $\varphi(x)$ é válido.*

Prova. $ZFC \vdash \forall z A^{L(z)}$

$ZFC \vdash \forall z(\forall x\exists y\varphi(x, y))^{L(z)}$

$ZFC \vdash (\forall x\exists y\varphi(x, y))^{L(z)}$

$ZFC \vdash \forall x \in L(z)\exists y \in L(z)\varphi^{L(z)}(x, y)$

Como A é Π_2, φ é Δ_0 e, portanto, absoluta:

$ZFC \vdash \forall x \in L(z)\exists y \in L(z)\varphi(x, y)$

Instanciando o x como z:

$ZFC \vdash \forall z \in L(z)\exists y \in L(z)\varphi(z, y)$

Por definição de L, $z \in L(z)$, logo:

$ZFC \vdash \forall z\exists y \in L(z)\varphi(z, y)$

$ZFC \vdash \exists y \in L(z)\varphi(z, y)$

Renomeando z como x:

$ZFC \vdash \exists y \in L(x)\varphi(x, y)$ $\square$

O resultado é similar ao que tivemos para Σ_1, exceto por uma variável ligada em φ. Quando o existencial y depende de um universal x em um enunciado construtivo, dizemos que y é construtivo em relação a x. Como foi dito anteriormente, chamamos esse conceito de construtividade relativa. Essa análise pode ser generalizada para toda a hierarquia de Lévy.

No capítulo seguinte, faremos uma análise mais aprofundada da abordagem PRC com foco em ZFC.

3 Análise das abordagens

Neste capítulo, analisaremos as abordagens descritas no capítulo anterior de maneira mais aprofundada.

3.1 Análise da abordagem tradicional

A abordagem tradicional possui diversas vantagens, sendo que a principal delas é a naturalidade da definição.

3.1.1 Análise da abordagem tradicional e teoria de conjuntos clássica

Veremos a seguir alguns resultados para a teoria de conjuntos. Comentamos no capítulo anterior que a ideia de construtividade está muito ligada ao axioma da extensionalidade quando estamos no contexto da teoria de conjuntos. Quando falamos que uma propriedade define unicamente um objeto, estamos falando que qualquer outro objeto que satisfaça aquela propriedade será igual ao primeiro e essa igualdade é definida pelo axioma da extensionalidade. O lema a seguir deixa essa conexão clara.

Lema 3.1 *Todo teorema da forma $\forall\bar{x}\exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, z))$, onde y não é livre em φ, é construtivo.*

Prova. Seja A um teorema da forma descrita acima. Para qualquer ênupla de conjuntos $\bar{x}$, seja ψ igual a $\exists y\forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, z))$ e sejam dois conjuntos a e b tais que valem $\psi(a)$ e $\psi(b)$, onde $\psi(z)$ é $\forall z(z \in y \leftrightarrow \varphi(\bar{x}, z))$. Suponha que exista um $c \in a$, o que implica que $\varphi(\bar{x}, c)$ e $c \in b$. Analogamente, se $c \in b$ então $c \in a$. Por extensionalidade, $a = b$. Logo, o existencial da sentença caracteriza um conjunto unicamente. Portanto, A é construtivo. $\square$

Corolário 3.2 *Os axiomas do par, união, separação e conjunto das partes utilizados neste trabalho são da forma do lema 3.1 e, portanto, são construtivos.*

Lema 3.3 *O axioma da substituição é construível em ZFC segundo a abordagem tradicional.*

Prova. Suponha que o axioma da substituição seja não construtivo. Então, para uma função classe F qualquer e um conjunto A qualquer, existem dois conjuntos a e b iguais a $F[A]$. Pelo axioma da extensionalidade, existe um elemento c em a que não está em b. Logo, existe um elemento d em A, tal que $F(d) = c$. Como $c \notin b$, F não é uma função. Absurdo. Concluímos que o axioma da substituição é construtivo. □

Também comentamos que demonstrações da não construtividade são menos diretas, pois devemos demonstrar que nenhuma propriedade Q define um objeto unicamente. Veremos agora dois exemplos de axiomas não construtivos em ZFC: o axioma da escolha e o axioma da fundação.

Lema 3.4 *O axioma da escolha é não construtivo em ZFC segundo a abordagem tradicional.*

Prova. Seja M um modelo que satisfaz ZFC. Tomamos uma ordem parcial P com domínio em todas as funções de subconjuntos finitos de ω em $\{0, 1\}$, e a ordem data pela inclusão. P produz uma noção de forcing de Cohen e, como consequência, um modelo $M[G]$ a partir de um filtro genérico G. Esse modelo satisfaz duas propriedades: (i) $L = HOD$ e (ii) existem reais que não estão em L. Considere o conjunto R' de todos os reais que não estão L. Como $M \vDash AC$, $M[G] \vDash AC$ e existe a escolha de um elemento x de R'. Se AC é construtivo, então existe uma propriedade Q que fixa unicamente x. A partir disso, concluímos que esse $x \in L$. Absurdo. Portanto, AC é não construtivo.

□

Uma prova desse mesmo resultado para subconjuntos de $\mathbb{R}$ pode ser encontrada no artigo (FEFERMAN, 1964).

Lema 3.5 *O axioma da fundação é não construtivo em ZFC segundo a abordagem tradicional.*

Prova. Suponha que o axioma da fundação seja construtivo em ZFC. Seja x o conjunto de todas as boas ordens dos reais. Como o axioma da fundação é construtivo, podemos definir um conjunto y a partir de x. Esse conjunto y é uma boa ordem definível dos reais. Como não é possível definir uma boa ordem em dos reais em ZFC, isso é um absurdo. Portanto, o axioma da fundação é não construtivo. □

Veremos como fica a teoria de conjuntos ZFC como um todo.

Teorema 3.6 *Todos os axiomas de ZFC, exceto os axiomas da escolha e da fundação, são construtivos segundo a abordagem tradicional.*

Prova. O axioma da extensionalidade não é uma sentença existencial, portanto, é construtivo.

Os axiomas do par, união, separação e conjunto das partes são da forma do lema 3.1, portanto, são construtivos.

Pelo lema 3.3 o axioma da substituição é construtivo.

Além desses, provamos que o axioma do infinito é construtivo no lema 2.4 e que os axiomas da escolha e da fundação são não construtivos nos lemas 3.4 e 3.4. □

Uma pergunta natural ao se estudar construtividade é: uma teoria com somente axiomas construtivos pode derivar teoremas não construtivos? Por exemplo, ZF sem fundação possui teoremas não construtivos? Em outras palavras, a construtividade nessa teoria é estável por dedução? Veremos que não, e essa é a principal crítica a essa abordagem.

Teorema 3.7 *Seja T' uma extensão de T em uma mesma linguagem. Suponha que exista ao menos um teorema não construtivo em T'. Então T possui teoremas não construtivos.*

Prova. Suponha que $\exists x P(x)$ seja não construtivo em T'.

Seja $P'(x)$ igual a $\exists x P(x) \to P(x)$. Podemos concluir, por uma regra da lógica de primeira ordem, que $\vdash \exists x P'(x)$. Em particular, $T \vdash \exists x P'(x)$.

Suponha que P' seja construtivo em T. Nesse caso, existe uma Q tal que $T \vdash \exists! x(Q(x) \land P'(x))$. Isso implica $T' \vdash \exists! x(Q(x) \land P'(x))$. Porém, em T', $P'(x)$ e $P(x)$ são equivalentes. Logo P seria construtivo em T', absurdo. □

Isso significa que, se uma teoria tem teoremas não construtivos, não podemos tornar ela construtiva ao retirar axiomas. Poderíamos pensar que, ao remover axiomas que julgamos não construtivos em ZFC, garantiríamos que todos os teoremas são construtivos, mas isso não é verdade. Mesmo que removamos todos os axiomas que julguemos não construtivos, não obteríamos uma teoria construtiva. Isso não parece adequado. As consequências de fórmulas construtivas não são necessariamente construtivas, e, portanto, a dedução não preserva a construtividade.

Contudo, o problema é ainda mais grave. Diferentes versões dos axiomas podem ser julgados de modos distintos na abordagem tradicional. Para mostrar isso, vamos analisar uma formulação equivalente do axioma da extensionalidade. Se essa teoria for estável, esperamos que essa formulação seja construtiva, pois ZF sem fundação prova essa formulação trivialmente.

Definição 3.8 *Formulação equivalente do axioma da extensionalidade:*

$$\forall x \forall y[x \neq y \to \exists z((z \in x \land z \notin y) \lor (z \notin x \land z \in y))]$$

Lema 3.9 *A formulação equivalente do axioma da extensionalidade 3.8 é não construtiva em ZF.*

Prova. Suponha que a formulação do axioma da extensionalidade seja construtiva. Seja x um conjunto com todas as boas ordens dos reais e y o conjunto vazio. Como $x \neq y$ e $y = \emptyset$, $\exists z(z \in x)$ é construtivo. Portanto, poderíamos caracterizar uma boa ordem dos reais, o que é absurdo. □

Corolário 3.10 *A formulação equivalente do axioma da extensionalidade 3.8 é não construtiva em ZFC.*

Teorema 3.11 *A definição de construtivo na abordagem tradicional não é estável por equivalência lógica em teorias clássicas.*

Prova. As duas formulações do axioma da extensionalidade apresentadas nas definições 1.2 e 3.8 são logicamente equivalentes, entretanto a primeira é construtiva e a segunda é não construtiva. □

O fato de axiomas equivalentes serem construtivos e não construtivos gera estranheza. Esse resultado nos mostra que não podemos falar de teorias construtivas na abordagem tradicional, pois, mesmo que todos os axiomas de uma teoria sejam construtivos, também haverá teoremas não construtivos. Além disso, para cada teoria com somente axiomas construtivos, existirá outra teoria equivalente com axiomas não construtivos. Portanto, a definição de construtividade segundo a abordagem tradicional deve ser reformulada em teorias clássicas.

3.1.2 Análise da abordagem tradicional e teoria de conjuntos intuicionista

A seguir, vamos analisar a estabilidade lógica da definição de construtivo segundo a abordagem intuicionista. Começaremos com um uma linguagem mais simples, sem símbolos de função, e a prova será feita utilizando a semântica de Kripke para a lógica intuicionista, descrita na definição 1.12.

Lema 3.12 *Sejam w e w' mundos de um modelos de Kripke tal que wRw' e φ uma fórmula. Se $v_w(\varphi) = 1$ então $v'_w(\varphi) = 1$.*

Prova. Provaremos por indução na complexidade de fórmulas. Para todos os casos, suponha $v_w(\varphi) = 1$ e wRw'.

Se φ é atômica, então, por definição, $w' \vDash \varphi$.

Seja φ do tipo $\neg\psi$. Suponha $v'_w(\varphi) = 0$. Então, para algum w'' tal que $w'Rw''$, $v''_w(\psi) = 1$. Por transitividade dos mundos, wRw''. Concluímos que $v_w(\varphi) = 0$. Absurdo.

Se φ é do tipo $\psi \vee \theta$, então $v_w(\psi) = 1$ ou $v_w(\theta) = 1$. Por hipótese de indução, $v'_w(\psi) = 1$ ou $v'_w(\theta) = 1$. Concluímos $v'_w(\psi \vee \theta) = 1$.

Se φ é do tipo $\psi \wedge \theta$, então $v_w(\psi) = 1$ e $v_w(\theta) = 1$. Por hipótese de indução, $v'_w(\psi) = 1$ e $v'_w(\theta) = 1$. Concluímos $v'_w(\psi \wedge \theta) = 1$.

Seja φ do tipo $\psi \to \theta$. Suponha $v'_w(\varphi) = 0$. Então, para algum w'' tal que $w'Rw''$, $v''_w(\psi) = 1$ e $v''_w(\theta) = 0$. Por transitivdade dos mundos, wRw''. Concluímos que $v_w(\varphi) = 0$. Absurdo.

Se φ é do tipo $\exists x\psi$, então, para algum $a \in D_w$, $v_w(\psi_x[k_a]) = 1$. Como $D_w \subseteq D'_w$, $a \in D'_w$ e, por hipótese de indução, $v'_w(\psi_x[k_a]) = 1$. Concluímos $v'_w(\exists x\psi) = 1$.

Se φ é do tipo $\forall x\psi$. Suponha $v'_w(\varphi) = 0$. Então, para algum mundo w'' tal que $w'Rw''$ e algum $a \in D''_w$, $v''_w(\psi_x[k_a]) = 0$. Por transitividade, wRw'' e $v_w(\forall x\psi)$. Absurdo. $\square$

Teorema 3.13 *Em uma linguagem que não tem símbolos de função, se* $\vdash_I \exists x\varphi(x)$*, então existe uma constante* c *tal que* $\vdash_I \varphi(c)$.

Resumo da Prova. Suponha que $\vdash_I \exists x\varphi(x)$ e que, para toda constante c, exista um modelo M_c tal que $M_c \nvDash_I \varphi(c)$. Seja w_c um mundo na base do modelo M_c. Então construímos o modelo M'_c, adicionando um mundo w'_c antes de w_c. O mundo w'_c será w_c restrito à interpretação de todas as constantes da linguagem, isto é, para cada constante k, $w'_c(k) = w_c(k)$ e $D(w'_c) = \{w_c(k) \mid k \in L\}$. A interpretação das relações em w'_c será precisamente a mesmas de w_c quando restrita ao domínio de w'_c. Além disso, ele acessa tanto w_c quanto todos os mundos acessíveis a w_c. Note que o novo modelo M'_c será um modelo intuicionista, pois tanto o domínio quanto as relações do mundo adicionado são restrições dos domínios e relações dos mundos que ele acessa.

A partir de todos os modelos M'_c, podemos construir o modelo $M*$ adicionando um novo mundo $w*$ que acessa todos os mundos w'_c de todos os modelos M'_c e todos os mundos acessados por eles. Podemos fazer a correspondência dos objetos desses mundos pela interpretação das constantes da linguagem. O domínio e as relações desse mundo serão definidos pela interseção de todos os domínios e relações de todos os w'_c. Note que, também, o modelo $M*$ é intuicionista.

Por suposição, sabemos que $\vdash_I \exists x\varphi(x)$, então existe um objeto $a \in w*$ tal que $M* \vDash_I \varphi(a)$. Como o domínio de $w*$ possui somente constantes, sabemos que existe uma constante k tal que $\vdash_I \varphi(k)$. Pelo lema anterior, 3.12, sabemos que esse resultado deve ser válido em todos os mundo acessíveis de $w*$. Portanto existe algum modelo M_k definido anteriormente tal que $M_k \models \varphi(k)$, o que é uma contradição. $\square$

Tomando a mesma estratégia, podemos agora provar a estabilidade para uma lógica intuicionista qualquer.

Teorema 3.14 *Em uma linguagem qualquer, se* $\vdash_I \exists x\varphi(x)$*, então existe um termo fechado* t *tal que* $\vdash_I \varphi(t)$*.*

Resumo da Prova. Seja t um termo fechado qualquer, $[t]_=$ representa a classe de equivalência de todos os termos fechados tal que a linguagem prova a igualdade com t: $[t]_= := \{u \text{ termo fechado } |\vdash_I u = t\}$.

Suponha que $\vdash_I \exists x\varphi(x)$ e que, para todo termo fechado t, exista um modelo M_t tal que $M_t \nvDash_I \varphi(t)$. Seja w_t um mundo na base do modelo M_t. Então construímos o modelo M'_t, adicionando um mundo w'_t antes de w_t. O mundo w'_t será w_t restrito à interpretação de todos os termos fechados da linguagem, isto é, para cada termo fechado u, $w'_t(u) = w_t(u)$ e $D(w'_t) = \{w_t(u) \mid u \in L\}$. A interpretação das relações em w'_t será precisamente a mesma de w_t quando restrita ao domínio de w'_t. Além disso, ele acessa tanto w_t quanto todos os mundos acessíveis a w_t. Note que o novo modelo M'_t será um modelo intuicionista, pois tanto o domínio quanto as relações do mundo adicionado são restrições dos domínios e relações dos mundos que ele acessa.

A partir de todos os modelos M'_t, podemos construir o modelo $M*$ adicionando um novo mundo $w*$ que acessa todos os mundos w'_t de todos os modelos M'_t e todos os mundos acessados por eles. A correspondência dos objetos nesse caso é mais complexa que no caso anterior. Definimos o domínio de $w*$ pela classes de equivalência de todos os termos da linguagem, dito de outra forma, $D(w*) = \{[t]_= \mid t \text{ termo fechado }\}$. Utilizando essa correspondência, definimos as relações pela interseção das relações de todos os w'_t. Note que, também, o modelo $M*$ é intuicionista.

Por suposição, sabemos que $\vdash_I \exists x\varphi(x)$, então existe um objeto $a \in w*$ tal que $M* \models_I \varphi(a)$. Como o domínio de $w*$ possui somente objetos equivalentes a termos, sabemos que existe um constante t tal que $\vdash_I \varphi(t)$. Pelo lema anterior, 3.12, sabemos que esse resultado deve ser válido em todos os mundo acessíveis de $w*$. Portanto existe algum modelo M_t definido anteriormente tal que $M_t \models \varphi(t)$, o que é uma contradição. $\square$

Corolário 3.15 *A abordagem tradicional é estável por dedução para lógicas intuicionistas.*

Esse último lema nos mostra que a lógica intuicionista é estável por dedução, entretanto não podemos concluir que qualquer teoria intuicionista é estável. Veremos agora alguns resultados conhecidos sobre teoria de conjuntos intuicionista que servirão de exemplos de instabilidade lógica do conceito de construtividade.

Lema 3.16 *O axioma da escolha implica o terceiro excluído em IZF.*

Prova. Seja φ uma fórmula qualquer e assuma o axioma da escolha. Pelo axioma da separação podemos definir os seguintes conjuntos:

$$A = \{n \in \{0,1\} : n = 0 \vee (n = 1 \wedge \varphi)\} \text{ e}$$
$$B = \{n \in \{0,1\} : n = 1 \vee (n = 0 \wedge \varphi)\}.$$

Ambos A e B são diferentes de vazio, pois $0 \in A$ e $1 \in B$. Dito de outra forma: $\forall z \in \{A, B\} \exists n \in \{0,1\}(n \in z)$. Portanto, podemos aplicar o axioma da escolha para definir uma função escolha $F : \{A, B\} \mapsto \{0,1\}$ tal que $F(A) \in A$ e $F(B) \in B$.

Se $0 = 1$ então, pelo axioma da extensionalidade, $0 \in 0$. Pelo axioma do vazio, temos que $0 \notin 0$, logo $0 = 1 \to 0 \notin 0$. Então, $0 \neq 1$. Portanto, temos que $F(A) = F(B)$ ou $F(A) \neq F(B)$.

Se $F(A) = F(B)$, então φ, portanto, $\varphi \vee \neg\varphi$.

Se $F(A) \neq F(B)$, suponha, por absurdo, que φ. Pelo axioma da extensionalidade, $A = B$, portanto, $F(A) = F(B)$, absurdo. Logo, $\neg\varphi$, portanto, $\varphi \vee \neg\varphi$.

Com isso, concluímos $\varphi \vee \neg\varphi$. $\square$

Lema 3.17 *O axioma da escolha é não construtivo segundo a abordagem tradicional em IZF.*

Prova. Pelo lema anterior, sabemos que a adição do axioma da escolha a IZF resulta em uma teoria clássica. Como os axiomas de IZF são todos teoremas de ZF, então IZF + AC é subteoria de ZFC. Sabemos pelo lema 3.4 que a AC não é construtivo em ZF. Não existe uma fórmula Q tal que ZFC prova que existe e é único um conjunto escolha x para um conjunto dado que satisfaz Q. Logo, IZF + AC também não prova a existência e unicidade do conjunto escolha para nenhum Q. $\square$

Lema 3.18 *O axioma da fundação implica o terceiro excluído em IZF.*

Prova. Seja φ uma fórmula qualquer e assuma o axioma da fundação. Pelo axioma da separação podemos definir o seguinte conjunto:

$$A = \{y \in \{0,1\} : y = 1 \vee (y = 0 \wedge \varphi)\}.$$

Pela definição, sabemos que o número 1 pertence ao conjunto A. Por fundação, temos que o conjunto A tem um elemento mínimo a. Como $a \in A$, $a = 1$ ou $a = 0$.

Se $a = 0$ e $a \in A$, então $a = 1 \vee (a = 0 \wedge \varphi)$.

Se $0 = 1$ então, pelo axioma da extensionalidade, $0 \in 0$. Pelo axioma do vazio, temos que $0 \notin 0$, logo $0 = 1 \rightarrow 0 \notin 0$. Então, $0 \neq 1$. Podemos concluir que $(a = 0 \wedge \varphi)$ e, portanto, φ e $\varphi \vee \neg\varphi$.

Se $a = 1$, então $0 \in a$. Portanto, $\neg(0 \in A)$ porque a é o elemento ϵ-minimal de A. Então, pela definição de A, $\neg(0 = 1 \vee (0 = 0 \wedge \varphi))$, $\neg\varphi$ e $\varphi \vee \neg\varphi$.

Com isso, concluímos $\varphi \vee \neg\varphi$. □

Lema 3.19 *O axioma da fundação é não construtivo segundo a abordagem tradicional em IZF.*

Prova. Pelo lema anterior, sabemos que a adição do axioma fundação a IZF resulta em uma teoria clássica. Logo, pelo mesmo argumento do lema 3.17, concluímos que o axioma da fundação não é construtivo em IZF. □

Teorema 3.20 *A construtividade segundo a abordagem tradicional é instável por dedução para teorias baseadas em lógicas intuicionistas.*

Prova. Seja uma teoria $T = IZF + AC$. Segundo o lema 3.17, a teoria T tem como teorema o terceiro excluído. Portanto, é uma teoria clássica. Pelo lema 3.11, temos que T é instável por dedução. □

Corolário 3.21 *A construtividade segundo a abordagem tradicional é instável por equivalência lógica para teorias baseadas em lógicas intuicionistas.*

O resultado acima nos mostra que uma teoria intuicionista se torna clássica dependendo dos axiomas escolhidos, e isso a torna instável por equivalência lógica. Esse fato nos leva à seguinte questão: quais são as condições para que uma teoria intuicionista seja estável? Dito de outra forma, existe algum axioma mais fraco que o terceiro excluído que torne a construtividade instável? Por exemplo, existe um sentido defendido no artigo (CROSILLA, 2020) em que IZF não atenderia todos os princípios construtivos, ainda que a teoria não fosse capaz de provar o terceiro excluído.

Em vista disso, podemos fazer duas perguntas:

Questão 3.22 *A teoria IZF 1.8 é não construtiva?*

Questão 3.23 *A teoria CZF 1.11 é construtiva?*

Uma forma de nos aprofundarmos nessas questões é utilizando a definição da lógica de primeira ordem de uma teoria qualquer.

Definição 3.24 *A lógica de primeira ordem de uma teoria T se consiste de todas as fórmulas de primeira ordem para as quais todas as instâncias de substituição uniforme de predicados por fórmulas são demonstráveis em T.*

Com base nessa definição, podemos nos perguntar qual a lógica de primeira ordem de IZF e CZF. As provas do lemas a seguir podem ser encontradas, respectivamente, em (FRIEDMAN; ŠčEDROV, 1986) e (PASSMANN, 2022).

Lema 3.25 *A lógica de primeira ordem de IZF é mais forte que a lógica intuicionista de primeira ordem.*

Lema 3.26 *A lógica de primeira ordem de CZF é a lógica intuicionista de primeira ordem.*

Esses resultados nos apontam na direção de que IZF seria não construtiva e CZF seria construtiva. Entretanto, a segunda afirmação é falsa. As provas dos lemas a seguir podem ser encontradas, respectivamente, em (FRIEDMAN; ŠčEDROV, 1985) e (SWAN, 2014).

Lema 3.27 *IZF não possui a propriedade da existência.*

Lema 3.28 *CZF não possui a propriedade da existência.*

Concluímos essa seção com o resultado de que ambas teorias IZF e CZF são não construtivas. IZF não ser construtiva era esperado, devido ao fato de sua lógica de primeira ordem ser mais forte do que a lógica intuicionista. Porém, a não construtividade de CZF é surpreendente: mesmo possuindo a lógica intuicionista como sua lógica de primeira ordem, seus axiomas não lógicos carregam não construtividade.

3.2 Análise da abordagem de produção relativa de conjuntos

A abordagem de produção relativa de conjuntos (PRC) nos dá resultados mais robustos, justamente por ser estável por equivalência lógica. Cabe ressaltar que essa estabilidade não é somente válida no contexto lógico, mas também no contexto de teorias. Isso a torna mais robusta que a abordagem tradicional.

Lema 3.29 *A construtividade na abordagem PRC, apresentada na definição 2.9, é estável por equivalência lógica.*

Prova. Suponha dois teoremas A e B tais que $A \leftrightarrow B$ e A construtivo. Então, pela definição de construtivo, vale $ZFC \vdash \forall x A^{L(x)}$. Seja a um conjunto qualquer. Com isso, sabemos que vale $ZFC \vdash A^{L(a)}$. Pelo teorema da substituição de equivalentes, temos que $ZFC \vdash B^{L(a)}$. Como a é um conjunto qualquer, sabemos que $ZFC \vdash \forall x B^{L(x)}$. Portanto, B é construtivo. $\square$

Isso permite a análise de teorias como um todo e não somente de enunciados, o que pode ser interessante do ponto de vista da fundamentação e filosofia da matemática.

Definição 3.30 *Uma teoria é chamada de construtiva se, e somente se, todos os seus axiomas são construtivos.*

Com a definição acima, podemos analisar axiomatizações distintas da teoria de conjuntos.

Lema 3.31 *Para qualquer x, $L(x)$ é modelo de ZF.*

Prova. A demonstração de que $L \vDash ZF$ se encontra no (JECH, 2006, p. 176). Adaptaremos a prova dos quatro primeiros axiomas a seguir.

Mostraremos que $\sigma^L(x)$ é válida para todo axioma σ de ZF. Como $L(x)$ é uma classe transitiva, toda fórmula Δ_0 é absoluta para $L(x)$. Isso significa que se uma fórmula com todos os quantificadores restritos a um conjunto é válida em ZF, então é válida em $L(x)$.

Extensionalidade: Como $L(x)$ é transitiva, vale o axioma da extensionalidade em $L(x)$.

Par: Sejam $a, b \in L(x)$ e $c = \{a, b\}$. Seja α tal que $a, b \in L(x)_\alpha$. Como $c = \{x \in L(x)_\alpha | L(x)_\alpha \vDash (x = a \vee x = b)\}$, então $c \in L(x)_{\alpha+1}$. Como $(x = a \vee x = b)$ é uma fórmula Δ_0, vale o axioma do par em $L(x)$.

Separação: Seja φ uma fórmula. Dados $X, p \in L(x)$, devemos mostrar que $Y = \{u \in X | \varphi^L(x)(u,p)\}$ está em $L(x)$. Pelo princípio da reflexão aplicado a $L(x)_\alpha$, existe um α tal que $X, p \in L(x)_\alpha$ e $Y = \{u \in X | \varphi^{L_\alpha(x)}(u,p)\}$. Então $Y = \{u \in L_\alpha(x) | L_\alpha(x) \vDash u \in X \wedge \varphi(u,p)$. Concluímos que $Y \in L(x)$ e que o axioma da separação vale em $L(x)$.

União: Sejam $X \in L(x)$ e $Y = \bigcup X$. Como $L(x)$ é transitivo, temos que $Y \subset L$. Seja α tal que $X \in L_\alpha(x)$ e $Y \subset L_\alpha(x)$. Y é definível sobre $L_\alpha(x)$ pela fórmula Δ_0 $x \in \bigcup X$ e, portanto, $Y \in L(x)$. Como $Y = \bigcup X$ é Δ_0, o axioma da união vale em $L(x)$. □

Lema 3.32 *ZF é uma teoria construtiva.*

Prova. Seja A um axioma de ZF. Vimos no lema 3.31 que $L(x)$ é modelo de ZF para todo x. Portanto, pelo teorema da correção para interpretações, se $ZF \vdash A$, então $ZF \vdash \forall x A^{L(x)}$. Concluímos que A é construtiva. □

Lema 3.33 *O axioma da escolha AC é não construtivo segundo a abordagem PRC.*

Prova. Dado um $V \vDash ZF$, considere o L em V. L satisfaz ZFC. Seja um filtro genérico G que introduz um número contável de reais de Cohen, obtemos $L[G]$. É possível, como vemos em (JECH, 2006, p. 222), obter um conjunto A composto de conjuntos de subconjuntos de ω tal que $HOD(A) \nvDash AC$ ($HOD(A)$ é o conjunto dos hereditariamente ordinal definíveis que contém A). Nesse caso, A é o próprio conjunto em $HOD(A)$ que não possui um conjunto escolha. Naturalmente, como $L(A) \subseteq HOD(A)$ e $A \in L(A)$, então também não pode haver uma função escolha de A em L. Assim, provamos que existe um modelo $L[G]$ de ZFC e um elemento A de $L[G]$ tal que AC não é válido em $L(A)$. Com isso, obtemos que $L[G] \nvDash (AC^{L(A)})$. Pelo teorema da completude de primeira ordem, obtemos que $ZFC \nvdash \forall x(AC^{L(x)})$. □

Corolário 3.34 *ZFC é uma teoria não construtiva.*

Prova. Sabemos que todos os axiomas de ZF são construtivos pelo lema 3.32 e que AC é não construtivo pelo lema 3.33. Portanto, ZFC é não construtivo. □

Uma crítica que pode ser feita a PRC é a complexidade e aparente arbitrariedade de sua definição. Quanto à arbitrariedade, de fato, outros universos poderiam ser utilizados, como, por exemplo, o universo dos hereditariamente definíveis (HOD). Entretanto, L nos garante a medida de construtividade mais forte possível, ou seja, sentenças construtivas segundo PRC continuariam a ser construtivas mesmo que qualquer outro universo fosse utilizado. Isso tem relação com o fato de L ser o menor modelo transitivo de ZF, o que será mostrado no capítulo seguinte. Quanto à complexidade, apresentaremos uma definição modelo-teórica que abstrai PRC.

4 Relações entre as abordagens

Neste capítulo, faremos relações entre as abordagens definidas no capítulo 2 em diferentes contextos lógicos e teóricos.

4.1 Abordagem tradicional: teorias clássicas em relação a teorias intuicionistas

No capítulo 3, demonstramos resultados sobre teorias de conjuntos clássicas e intuicionistas segundo a abordagem tradicional. Mostramos que os únicos axiomas de ZFC que são não construtivos segundo CT em suas formas usuais são os axiomas da escolha e da fundação. Mostramos também que, quando esses axiomas são adicionados a IZF, o terceiro excluído passa a ser verdadeiro nessa nova teoria. Esses fatos são demonstrados nos lemas 3.4, 3.5, 3.16 e 3.16.

Vimos que o conceito de construtividade da abordagem tradicional é instável por dedução para a lógica clássica no lema 3.7. Ainda que avaliemos uma sentença como construtiva, pode haver uma versão equivalente da sentença que é não construtiva. Isso acontece até mesmo para axiomas que aparentemente não dizem respeito à existência, como o axioma da extensionalidade. Embora a versão quantificada universalmente da extensionalidade seja construtiva, o seu equivalente existencial passaria a ser não construtivo. Portanto, ao admitirmos a abordagem CT, concluímos que a construtividade é uma característica das fórmulas de primeira ordem, em vez de uma característica da **proposição expressa**[1] pela fórmula de primeira ordem. Afinal, a proposição expressa por uma fórmula de primeira ordem é usualmente considerada estável por equivalência lógica. Essa instabilidade pode, naturalmente, ser verificada no contexto teórico, como vimos no lema 3.11. Ou seja, ainda que relativizemos a análise da construtividade de uma sentença a uma teoria, haverá sentenças que possuem equivalentes avaliados de forma distinta em CT.

Vimos também que a lógica intuicionista pode ajudar a evitar o problema da instabilidade da definição de construtividade. Para isso, no contexto lógico, é removida a possibilidade de provar um existencial sem que haja um termo que corresponda a esse existencial. Demonstramos esse fato com o lema 3.15. Desse modo, o intuicionismo tem uma clara vantagem em relação à lógica clássica, caso adotemos a abordagem CT. Uma teoria intuicionista T poderia

[1] Para os nossos propósitos, é suficiente considerar que a proposição expressa é a classe de equivalência lógica de todas as sentenças logicamente equivalentes à proposição.

ser dita construtiva caso todos os seus axiomas sejam construtivos na abordagem CT. De fato, todos os teoremas de T seriam construtivos segundo a abordagem CT. E, portanto, CT é estável por equivalência lógica para teorias intuicionistas puramente construtivas.

Entretanto, no contexto teórico intuicionista, os axiomas de uma teoria podem carregar não construtividade. Nesse caso, o fato de termos uma lógica de base intuicionista não preservaria a análise da construtividade, como demonstramos no lema 3.20. Ou seja, existem teorias intuicionistas T para as quais uma propriedade φ é construtiva enquanto um equivalente intuicionista φ' não é. Ainda que CT funcione para análise de teorias totalmente construtivas, não funciona adequadamente para a análise de sentenças construtivas de teorias intuicionistas em geral. Tanto CZF quanto IZF são exemplos de teorias cujos axiomas não lógicos carregam não construtividade, conforme os lemas 3.27 e 3.28.

4.2 Abordagem tradicional em relação à abordagem PRC

De fato, as abordagens PRC e CT concordam em diversos casos. Por exemplo, todos os axiomas de ZF, exceto fundação, são avaliados como construtivos. Esses resultados são demonstrados nos lemas 3.6 e 3.32. A prova de que ambas abordagens concordam na avaliação de não construtividade do axioma da escolha é realizada nos lemas 3.4 e 3.33.

Elas diferem quanto à avaliação do axioma da fundação, lemas 3.5 e 3.32, e da formulação alternativa do axioma da extensionalidade. Isso ocorre porque a abordagem PRC exclui modelos não transitivos da sua definição: $L(x)$ é construído a partir do conjunto x e de seu fecho transitivo, portanto, $L(x)$ é um modelo transitivo. Essa diferença não é fundamental, nos parece possível adaptar a definição e manter as propriedades vistas anteriormente que não tem relação com a transitividade. Entretanto, existem diferenças fundamentais entre as abordagens.

A PRC foi desenvolvida em contraposição à CT com o intuito de corrigir a instabilidade por equivalência lógica do conceito de construtividade. Portanto, quando avaliamos que uma sentença é construtiva em PRC, podemos, com efeito, dizer que **a proposição expressa pela sentença é construtiva**. Isso é importante caso desejemos que o conceito de construtividade não seja simplesmente atribuído à forma, à escrita, de uma sentença – mas atribuído à semântica expressa pelas sentenças. Demonstramos essa instabilidade no lema 3.7 e no lema 3.29. E como discutimos na seção anterior, a CT não garante essa mesma estabilidade – atribuindo construtividade a fórmulas em vez de proposições. Com isso, a PRC corrige o problema que, por exemplo, foi apontado em relação às versões do axioma da extensionalidade: qualquer versão do axioma será construtiva de acordo com a abordagem PRC.

Apesar de corrigir diversos problemas apontados na abordagem tradicional, a abordagem PRC torna o conceito de construtividade mais específico (por exemplo, com relação à construção L em ZF) e perde a naturalidade da abordagem tradicional. Apresentaremos uma definição mais natural, que não depende diretamente do universo dos construtivos L da teoria de conjuntos. Exploraremos essa definição modelo-teórica e mais abstrata no capítulo 5.

A partir da análise desenvolvida nesse capítulo, concluímos que a abordagem PRC possui vantagens significativas em relação à tradicional. Ainda assim, como discutido, as teorias intuicionistas podem não ser completamente construtivas. E isso pode ocorrer mesmo que não seja válido, por exemplo, o terceiro excluído. Por isso, além de definirmos abstratamente a abordagem PRC, estenderemos a abordagem de modo que seja possível aplicá-la às teorias intuicionistas em geral (algo que não é possível para CT).

5 Modelos minimais

A abordagem PRC define a construtividade somente para a teoria de conjuntos clássica, mais especificamente, para ZFC. Neste capítulo, vamos propor uma definição de construtividade muito próxima à PRC, mas que possa ser aplicada a teorias não clássicas.

5.1 Abstraindo a abordagem PRC a partir de modelos minimais

Um conceito fundamental na definição de construtividade segundo a abordagem PRC é o universo dos conjuntos construtivos L. Tentar justificar seu uso na definição nos parece uma boa forma de tentar abstrair a definição para outras teorias e lógicas. Quando comparamos um modelo M de ZF que satisfaz sentenças não construtivas ao $L(a)$, sendo a um conjunto qualquer desse modelo, percebemos que M possui conjuntos que não estão $L(a)$.

Lema 5.1 *Seja $V \vDash ZFC$ e $a \in V$. Seja M um modelo transitivo que contém o fecho transitivo de a, $M \vDash ZF + A$ com A não construtivo. Então $M \supsetneq L(a)$.*

Prova. A é não construtivo se, e somente se, $ZFC \nvdash \forall x A^{L(x)}$. Pelo teorema da completude, existe $V \vDash ZFC$ tal que $V \vDash \exists x \neg A^{L(x)}$. Então existe $a \in V$ tal que $\neg A^{L(a)}$, logo $L(a) \nvDash A$. Seja $M \vDash ZF + A$ e contém o fecho transitivo de a. Como $L(a)$ é o menor modelo transitivo de ZF que contém o fecho transitivo de a, então M contém $L(a)$. Como M e $L(a)$ discordam sobre A, $M \nvDash L(a)$. Logo, existem elementos em M que não pertencem a $L(a)$. Esses elementos são as testemunhas da não construtividade A. $\square$

Sabemos que certos modelos de ZF possuem conjuntos que não estão contidos em $L(a)$, o que nos leva a seguinte pergunta: $L(a)$ é o menor conjunto que satisfaz ZF e contém a? De forma geral, a resposta é não. Modelos não transitivos não necessariamente possuem todos os elementos de $L(a)$.

Um exemplo pode nos ajudar a entender essa questão. Seja L' um modelo construído a partir de L, pela substituição de $\emptyset$ por $\{\emptyset\}$. Seja L'' um modelo construído a partir de L, pela substituição de $\emptyset$ por $\{\{\emptyset\}\}$. Ambos são isomorfos e modelos de ZF, porém, um não contém o outro. Uma forma de uniformizar essas comparações entre modelos é por meio da utilização de colapsos. Dado um modelo qualquer M de uma teoria T, dizemos que T tem colapso π se toda classe de modelos definíveis isomorfos em M é mapeado por π em um único modelo de M. O teorema do colapso de Mostowski, 1.20, nos ajuda a comparar modelos como esses. Quando aplicamos o colapso aos dois modelos citados anteriormente, obtemos L. Essa aplicação nos dá uma classe de modelos canônicos que nos permite a comparação de modelos distintos.

Proposta 5.2 *Seja M um modelo de uma teoria clássica T. M é modelo mínimo de T se, e somente se, M é transitivo e, para todo modelo N de T, $M \subseteq \pi(N)$ para algum um colapso π.*

Entretanto, nem toda teoria clássica possui modelo mínimo. Portanto, ela só seria aplicável a uma parte das teorias de interesse. Podemos reformular essa definição para nos referirmos a modelos minimais e tornar esse conceito mais abrangente.

Proposta 5.3 *Seja M um modelo de uma teoria clássica T. M é modelo minimal de T se, e somente se, M é transitivo e não existe um modelo N de T tal que $\pi(N) \subsetneq M$ para qualquer colapso π.*

Agora que possuímos uma proposta de definição de modelo minimal para uma teoria, podemos pensar em modelos gerados a partir de conjuntos. A definição de construtividade segundo PRC utiliza $L(x)$, que é gerado a partir de um conjunto x e seu fecho transitivo. Precisamos do fecho transitivo para garantir que o modelo gerado também o seja, fazendo com que ele continue na classe de modelos canônicos que comentamos anteriormente. Ao utilizarmos modelos minimais, não precisamos nos preocupar com o fecho do conjunto pois a definição de minimal já tem como premissa que o modelo é transitivo. Vamos, então, abstrair a definição de construtivo da abordagem PRC, que chamaremos de APRC.

Definição 5.4 *Seja T uma teoria clássica e A um teorema de T. Seja $M(x)$ um modelo minimal de T que contém x. A é construtivo segundo APRC se, e somente se, para todo a em algum modelo de T e para todo $M(a)$ vale $M(a) \vDash A$.*

A definição de construtividade PRC 2.9 assume que L é uma interpretação. Modificamos essa definição para permitir que $L(x)$ possa ser um modelo construído em uma metateoria que não é T. No caso de T ser ZF, temos a conveniência de que o modelo mínimo é definível em ZF como uma interpretação. Ainda mais, o modelo mínimo em relação a qualquer fecho transitivo é definível. Porém, isso não vale para todos os casos.

Definição 5.5 *Dado um modelo V de ZFC, M é modelo interno se, e somente se, $V \vDash \forall x \forall y((x \in M \land y \in x) \rightarrow y \in M$ e $Ord^M = Ord^V$.*

Lema 5.6 *L é modelo interno.*

Resumo da Prova. L é transitivo e contém todos os ordinais. Uma prova completa pode ser encontrada em (JECH, 2006, p. 187). □

Teorema 5.7 *L é modelo mínimo de ZF.*

Resumo da Prova. Vimos que L é modelo interno em 5.6. Resta demonstrar que ele está contido em qualquer outro modelo interno.

Seja M um modelo interno qualquer e L^M a classe de todos os conjuntos construtíveis em M. Provaremos que $L^M = L$.

Provaremos que $L_\alpha = L^M_\alpha$ para todo α. Suponha que exista um menor α tal que $L_\alpha \neq L^M_\alpha$. Se α é limite, então L^M_α é $\bigcup_{\beta<\alpha} L^M_\beta$. Por hipótese, $L_\beta = L^M_\beta$ para todo $\beta < \alpha$. Logo, $L_\alpha = L^M_\alpha$, pois a fórmula $x = \bigcup y$ é Δ_0. Absurdo. Por outro lado, se α é um $\gamma + 1$, então $L_\gamma = L^M_\gamma$ e $a \in Def(L_\gamma)$. Logo, existe uma definição $\varphi(x, b)$ de a tal que $x \in a \leftrightarrow \varphi^{L_\gamma}(x, b)$.[1] Como $\varphi^y(x, z)$ é uma fórmula Δ_0 e $b, L_\gamma \in M$, então $\varphi^{L_\gamma}(x, b) \leftrightarrow (\varphi^{L_\gamma}(x, b))^M$. Portanto, $a \in (Def(L^M_\gamma))^M$ e $a \in L^M_\alpha$. Absurdo. Concluímos que $L^M = L$.

Como $L^M = L$, $L \subseteq M$. □

Corolário 5.8 *Para ZFC, as definições 2.9 e 5.4 são equivalentes. Ou seja, A é construtivo na abordagem PRC se, e somente se, A é construtivo na abordagem APRC.*

Algo importante de se verificar é em quais casos a definição abstrata é mais fraca que a definição mais específica. Ou seja, deveríamos encontrar teorias para as quais o modelo mínimo existe, mas não é definível. Isso é importante para estabelecermos uma distinção robusta entre essas duas definições.

Questão 5.9 *Existe uma teoria clássica T tal que ela tem modelo mínimo M e existe um modelo de T no qual M não é definível?*

Caso a resposta a essa pergunta seja positiva, e parece ser o caso que sim, as definições não seriam equivalentes. Especificamente, a definição PRC implica a definição APRC, uma vez que PRC é um caso particular de APRC. Porém, a implicação contrária não valeria.

[1] A existência da fórmula φ é dada por um número da fórmula de Gödel e o tratamento dela é feito pelo predicado de satisfação para conjuntos transitivos. Para detalhes sobre a construção, ver (JECH, 2006, p. 175-200).

5.2 Modelos minimais no contexto da semântica de Kripke

Agora que possuímos uma definição de construtividade para qualquer teoria clássica, podemos pensar em como adaptar essa definição para teorias intuicionistas. Antes de fazê-lo, precisamos pensar em uma definição para modelos minimais que seja diferente da clássica.

Vimos anteriormente que cada mundo da semântica de Kripke é um modelo clássico. Portanto, podemos tentar definir algum colapso para torná-los comparáveis. Além disso, sabemos que os domínios de mundos acessíveis só se expandem. Podemos definir um mundo limite, que é a união de um ramo da ordem parcial de mundos. Esse mundo pode servir de parâmetro para usarmos o colapso do modelo clássico.

Proposta 5.10 *Seja K um modelo de Kripke para uma teoria intuicionista T (sem símbolos de funções). w^* é chamado de mundo limite de K se, e somente se,*

1. *existe uma sequência de mundos $S : \lambda \longrightarrow W$ tal que todo m é tal que $S(n)RS(m)$ para todo $n < m$;*
2. *$D_{w^*} = \bigcup_{i\in\lambda} D_{S(i)}$;*
3. *Seja P uma relação em T, $P_{w^*} = \bigcup_{i\in\lambda} P_{S(i)}$;*
4. *Seja c uma constante de T, $c_{w^*} = c_w$ para algum w da sequência.*

Munidos dessa proposta de definição, podemos definir um modelo minimal de Kripke:

Proposta 5.11 *Seja K um modelo de uma teoria intuicionista T. M é modelo minimal de T se, e somente se, M contém um único mundo limite e não existe um modelo N de T com um mundo limite w_N tal que $\pi(w_N) \subsetneq w_M$ para qualquer colapso π.*

Com essa proposta de definição de modelos minimais intuicionistas, podemos generalizar APRC 5.4 e definir a abordagem de modelos minimais (MM):

Proposta 5.12 *Seja T uma teoria e A um teorema de T. Seja $M(x)$ um modelo minimal de T que contém x. A é construtivo segundo MM se, e somente se, para todo a em algum modelo de T e para todo $M(a)$ vale $M(a) \vDash A$.*

6 Conclusão

Neste trabalho, apresentamos três abordagens da construtividade matemática e analisamos a sua aplicação a teorias de conjuntos clássicas e intuicionistas.

Pela falta de uma referência padrão para a abordagem tradicional (CT), elaboramos uma definição com base no uso do termo construtividade no contexto da prática matemática. Ao aplicar essa definição à teoria de conjuntos clássica ZFC, observamos que dois de seus axiomas não lógicos são não construtivos: o axioma da fundação e o axioma da escolha. Além disso, demonstramos que sentenças equivalentes podem ter avaliação de construtividade distintas, o que torna a abordagem inadequada para a análise da construtividade. Isso é o que chamamos de o problema da instabilidade por equivalência lógica para uma definição de construtividade.

A mesma abordagem foi utilizada em relação à construtividade de teorias intuicionistas. Como esperado, todos os teoremas da lógica intuicionista de primeira ordem são construtivos segundo CT. Entretanto, na presença de axiomas não construtivos, o problema da instabilidade por equivalência lógica volta a acontecer. A adição de AC à teoria intuicionista IZF tem como consequência os axiomas da lógica clássica. Portanto, na presença dessa teoria, enquanto a versão padrão do axioma da extensionalidade é construtiva em CT, uma versão equivalente é não construtiva. Além disso, tanto IZF quanto CZF possuem sentenças não construtivas segundo CT. Concluímos que a abordagem é inadequada também para teorias de conjuntos intuicionistas.

Chamamos a abordagem da construtividade proposta por Rodrigo Freire em *On Existence in Set Theory* de abordagem da produção relativa de conjuntos (PRC). Usando essa abordagem, vimos que todos os axiomas de ZF são construtivos e o axioma da escolha é não construtivo. Mostramos que, diferentemente de CT, PRC possui estabilidade por equivalência lógica e, por isso, é adequada para análise da construtividade de sentenças para teorias clássicas. Entretanto, sua definição depende do universo construtível L que é definido em ZFC. Isso a torna inadequada para a avaliação de teorias baseadas em lógicas intuicionistas.

Para contornar essa limitação, propusemos adaptar PRC para teorias intuicionistas. Por meio da utilização de modelos de Kripke, definimos a abordagem de modelos minimais (MM). Em vez de utilizarmos o universo construtível L diretamente, nos utilizamos da propriedade de que L é modelo mínimo de ZFC. Definimos o que é um modelo minimal na semântica de Kripke para que a abordagem possa ser utilizada em teorias baseadas em lógicas intuicionistas.

Por fim, pode ser objeto de futuros trabalhos uma análise mais aprofundada das teorias de conjuntos intuicionistas a partir de MM. Não sabemos se MM possui estabilidade por equivalência lógica. Além disso, não demonstramos que teorias as IZF e CZF são construtivas segundo MM. Acreditamos que essas são questões importantes que devem ser resolvidas com um estudo aprofundado de MM.

Referências

BERKSON, W. The formal and the informal. *PSA: Proceedings of the Biennial Meeting of the Philosophy of Science Association*, [University of Chicago Press, Springer, Philosophy of Science Association], v. 1978, p. 297–308, 1978. ISSN 02708647. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/192474>. Citado na página 10.

BROUWER, L. On the significance of the principle of excluded middle in mathematics, especially in function theory (1923). *Reprint in: van Heijenoort*, 1999. Citado na página 7.

BROUWER, L. E. J. Intuitionistic reflections on formalism. *originally published in*, p. 490–492, 1927. Citado na página 10.

CROSILLA, L. Set Theory: Constructive and Intuitionistic ZF. In: ZALTA, E. N. (Ed.). *The Stanford Encyclopedia of Philosophy*. Summer 2020. [S.l.]: Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2020. Citado 4 vezes nas páginas 8, 10, 13 e 34.

FEFERMAN, S. Some applications of the notions of forcing and generic sets. *Fundamenta mathematicae*, Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk, v. 56, p. 325–345, 1964. Citado na página 28.

FRAENKEL YEHOSHUA BAR-HILLEL, A. L. A. A. *Foundations of Set Theory*. [S.l.]: North-Holland, 1973. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics). Citado na página 18.

FREIRE, A. R. *Estudo comparado do comprometimento ontológico das teorias de classes e conjuntos*. Tese (Doutorado) — Departamento de Filosofia da Universidade de Campinas, Campinas, 3 2019. An optional note. Citado na página 15.

FREIRE, A. R.; FREIRE, R. D. A. The ontological import of adding proper classes. *Manuscrito*, SciELO Brasil, v. 42, p. 85–112, 2019. Citado na página 15.

FREIRE, A. R.; HAMKINS, J. D. Bi-interpretation in weak set theories. *The Journal of Symbolic Logic*, Cambridge University Press, p. 1–25, 2020. Citado na página 15.

FREIRE, R. On existence in set theory. *Notre Dame Journal of Formal Logic*, v. 53, n. 4, 2012. Citado 2 vezes nas páginas 8 e 23.

FREIRE, R. *In what ways is ZF (without Choice) "somewhat constructive"*. 2018. MathOverflow. URL:https://mathoverflow.net/q/297759 (version: 2018-04-13). Disponível em: <https://mathoverflow.net/q/297759>. Citado na página 8.

FREIRE, R. *Tópicos em Lógica de Primeira Ordem*. [S.l.]: Lógica no Avião, 2019. 99 p. (Série L). Citado na página 8.

FREIRE, R. *What are some further examples of proper class models of ZF that are contained in their own "self-relativization"?* 2020. MathOverflow.

URL:https://mathoverflow.net/q/369960 (version: 2020-08-23). Disponível em: <https://mathoverflow.net/q/369960>. Citado na página 8.

FRIEDMAN, H. M.; ŠčEDROV, A. The lack of definable witnesses and provably recursive functions in intuitionistic set theories. *Advances in Mathematics*, v. 57, n. 1, p. 1–13, 1985. ISSN 0001-8708. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0001870885901033>. Citado na página 35.

FRIEDMAN, H. M.; ŠčEDROV, A. On the quantificational logic of intuitionistic set theory. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, Cambridge University Press, v. 99, n. 1, p. 5–10, 1986. Citado na página 35.

HAMKINS, J. D. *Non-constructive existence proofs without AC?* 2013. MathOverflow. URL:https://mathoverflow.net/q/123612 (version: 2013-03-20). Disponível em: <https://mathoverflow.net/q/123612>. Citado na página 8.

JECH, T. *Set theory*. [S.l.]: Springer, 2006. (Springer Monographs in Mathematics). Citado 7 vezes nas páginas 8, 15, 16, 24, 36, 37 e 44.

LEVY, A. *Basic Set Theory*. Dover Publications, 2002. (Basic set theory, v. 13). ISBN 9780486420790. Disponível em: <https://books.google.com.br/books?id=TCIX3qis9pUC>. Citado na página 8.

LEWIS, D. W. David hilbert and the theory of algebraic invariants. *Irish Math. Soc. Bull*, v. 33, p. 42–54, 1994. Citado na página 7.

PASSMANN, R. The first-order logic of czf is intuitionistic first-order logic. *The Journal of Symbolic Logic*, Cambridge University Press, p. 1–23, 2022. Citado na página 35.

PERDRY, H. Strongly noetherian rings and constructive ideal theory. *Journal of Symbolic Computation*, v. 37, n. 4, p. 511–535, 2004. ISSN 0747-7171. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0747717103001226>. Citado na página 7.

POSY, C. J. Brouwer's constructivism. *Synthese*, Springer, v. 27, n. 1/2, p. 125–159, 1974. ISSN 00397857, 15730964. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/20114910>. Citado na página 10.

PRIEST, G. *An Introduction to Non-Classical Logic - From If to Is*. [S.l.]: Cambridge University Press, 2008. (Cambridge Introductions to Philosophy). Citado 2 vezes nas páginas 8 e 13.

SHOENFIELD, J. R. *Mathematical Logic*. [S.l.]: Addison Wesley Publishing Company, 1967. Citado 2 vezes nas páginas 15 e 16.

SILVA, J. J. da. *Filosofias da matemática*. [S.l.]: Unesp, 2007. Citado na página 7.

SWAN, A. W. Czf does not have the existence property. *Annals of Pure and Applied Logic*, v. 165, n. 5, p. 1115–1147, 2014. ISSN 0168-0072. Disponível em: <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S016800721400013X>. Citado na página 35.

TROELSTRA, D. v. D. A. S. *Constructivism in Mathematics - An Introduction. Volume 1 e 2*. [S.l.]: Elsevier, Academic Press, 1973. (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics). Citado na página 10.